Matematica dei nodi di cravatta

Combinatoria, topologia, isometrie e tassellazioni

di Andrea Centomo

Email: andrea.centomo@istruzione.it

2 ottobre 2014

Premessa

- 1850 nodo tiro a quattro
- 1926 Jesse Langsdorf produce la prima cravatta moderna
- 1935 nodi Windsor
- 1989 nodo Pratt
- ....

Nodi di cravatta ... nel 1999

Thomas Fink un fisico del Curie Institute/CNRS e del London Institute for Mathematical Sciences che si occupa di Meccanica Statistica per studiare sistemi complessi in Fisica e Biologia.

Yong Mao un ricercatore del St. John's College di Cambridge che si occupa di reti di polimeri.

Modello Fink e Mao

Nodo: stringa di caratteri con lettere `S`, `D` e `C`

- si omettono i simboli $\otimes$ e $\odot$
- si toglie $D_{\otimes}C_{\odot}A$ $(S_{\otimes}C_{\odot}A)$ dalla chiusura $S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$ $(D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A)$

$$\text{Nodo di dimensione } d$$

$$\updownarrow$$

$$\text{Stringa di } n = d - 2 \text{ caratteri}$$

Esempio. Nodo mezzo Windsor: $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A \quad \leftrightarrow \quad$ `SDCS`

Vincoli per le stringhe

a) ogni stringa inizia con `S`

b) due lettere consecutive di una stringa non possono essere uguali

c) ogni stringa si conclude con `S` o `D`

$$\mathcal{S}_n = \{\text{stringhe di } n \geq 1 \text{ caratteri: } a), b), c) \text{ verificati}\}$$

Quante stringhe contiene $\mathcal{S}_n$?

d_k numero di stringhe di k caratteri, $k > 1$,

- soddisfano solo il vincolo b) (stringhe prive di doppie)
- iniziano e terminano con lettere **diverse** fissate a priori

u_k numero di stringhe con k caratteri, $k > 1$,

- che soddisfano solo il vincolo b)
- iniziano e terminano con lettere **uguali** fissate a priori

Ad esempio:

Inizio `S` Fine `D`	Inizio `S` Fine `S`
$d_2 = 1$ (`SD`)	$u_2 = 0$ (`SS` non è valida)
$d_3 = 1$ (`SCD`)	$u_3 = 2$ (`SDS`, `SCS`)
$d_4 = 3$ (`SDSD`, `SDCD`, `SCSD`)	$u_4 = 2$ (`SDCS`, `SCDS`)

Cerchiamo una relazione ricorsiva per d_n (ad esempio per stringhe `S`...`D`)

- ci sono d_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SC` e fine `D`
- ci sono u_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SD` e fine `D`

$$d_n = d_{n-1} + u_{n-1} \tag{1}$$

Analogamente per u_n (ad esempio per stringhe `S`...`S`):

- ci sono d_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SC` o `SD` e fine `S`

$$u_n = 2d_{n-1} \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si trova

$$d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2} \tag{3}$$

$$d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2} \tag{4}$$

Esplicitiamo d_n a partire dalle radici del polinomio $x^2 - x - 2$ ($x = 2$ e $x = -1$);

$$d_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n \tag{5}$$

Dato che $d_2 = 1$ e $d_3 = 1$ si calcolano i valori di α e β, concludendo che

$$d_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \tag{6}$$

Infine possiamo determinare il numero T_n di stringhe di $\mathcal{S}_n$:

$$T_n = d_n + u_n = d_{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{7}$$

In alternativa si può notare che

$$d_n + d_n + u_n = 2^{n-1} \tag{8}$$

$$2d_n + 2d_{n-1} = 2^{n-1}$$

$$d_n + d_{n-1} = 2^{n-2}$$

$$d_n = 2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \ldots \pm 1 \tag{9}$$

In conclusione

$$T_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{10}$$

Quanti nodi di cravatta ci sono?

Per ragioni di natura fisica e per ragioni estetiche vale la limitazione

$$1 \leq n \leq 7 \tag{11}$$

Il numero totale di nodi T è

$$T = \sum_{n=1}^{7} T_n = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{7} 2^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{7} 2^n = \frac{2^8 - 1}{3} = 85.$$

Forma

La forma di un nodo è descritta dal numero γ di movimenti di centro (`C`).

Nel modello semplificato $k = \gamma - 1$.

Quali valori possibili di k per stringhe di $\mathcal{S}_n$?

A) se n pari:

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

B) se n dispari

$$0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Quanti elementi di $\mathcal{S}_n$ hanno forma k?

Iniziamo considerando $n-k-1$ celle e andiamo a sistemare in esse k lettere `C`.

	C			C	C		

Il numero di modi m in cui è possibile fare questo si esprime attraverso il coefficiente binomiale

$$m = \binom{n-k-1}{k}$$

Aggiungiamo all'inizio e dopo ogni lettera `C` uno spazio vuoto.

		C				C		C			

Riempiamo il primo spazio vuoto con `S`, per soddisfare il vincolo a).

S		C				C		C			

Alterniamo lettere `D` o `S` fino ad incontrare la prima lettera `C`.

S	D	C				C		C			

Nel primo spazio vuoto dopo la prima lettera `C` possiamo scegliere di inserire una lettera `D` o `S`. Quindi si procede alternando fino alla seconda lettera `C`.

S	D	C	D	S	D	C		C			

Nel primo spazio vuoto dopo la seconda lettera `C` possiamo scegliere di inserire una lettera `D` o `S` ....

S	D	C	D	S	D	C	S	C	S	D	S

Ci sono 2^k possibili modi per completare la stringa!

Il numero di elementi di $\mathcal{S}_n$ con forma k è allora

$$F_n(k) = 2^k \cdot \binom{n-k-1}{k} \tag{12}$$

$d=n+2$	$\gamma=k+1$	classe	$F_n(k)$	T_n
3	**1**	$\{3,1\}$	1	1
4	**1**	$\{4,1\}$	1	1
5	**1**	$\{5,1\}$	1	3
	2	$\{5,2\}$	2	
6	**1**	$\{6,1\}$	1	5
	2	$\{6,2\}$	4	
7	1	$\{7,1\}$	1	11
	2	$\{7,2\}$	6	
	3	$\{7,3\}$	4	
8	1	$\{8,1\}$	1	21
	2	$\{8,2\}$	8	
	3	$\{8,3\}$	12	
9	1	$\{9,1\}$	1	43
	2	$\{9,2\}$	10	
	3	$\{9,3\}$	24	
	4	$\{9,4\}$	8	

Tabella 1. Classi di nodi $\{d,\gamma\}$

Estetica

Rapporto forma-dimensione

$$r = \frac{\gamma}{d} \qquad\qquad \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{2} \tag{13}$$

Grado di simmetria

$$s = |n_d - n_s| \qquad\qquad s \leq 1 \tag{14}$$

n_d numero di movimenti di tipo D e n_s numero di movimenti di tipo S.

Il nodo mezzo Windsor $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$ ha grado di simmetria $s = 0$.

Equilibrio

a) transizioni $C \to D$, $D \to S$ e $S \to C$ valore $+1$

b) transizioni $D \to C$, $S \to D$ e $C \to S$ valore -1

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} |\omega_i - \omega_{i-1}|$$

e ω_i valore transizione $i \to i+1$.

Per il mezzo Windsor $S_{\otimes} D_{\odot} C_{\otimes} S_{\odot} D_{\otimes} C_{\odot} A$ le transizioni sono

$$S_{\otimes} \to D_{\odot} \to C_{\otimes} \to S_{\odot} \to D_{\otimes} \to C_{\odot}$$

$$e = \frac{1}{2} (|-1+1| + |-1+1| + |-1+1| + |-1+1|) = 0$$

Il nodo maggiormente estetico di una classe avrà il valore minimo di e in quella classe.

Le caratteristiche che un nodo deve soddisfare per essere estetico sono:

A) aver un buon rapporto forma-dimensione (9)

B) essere simmetrico (10)

C) essere equilibrato (minimizzare e).

d	γ	sequenza	s	e	**nome**
3	1	$S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	0	**Orientale**
4	1	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1	1	Tiro a quattro
5	1	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	2	Kelvin
5	2	$S_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	1	1	Pratt
6	1	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1	3	Victoria
6	2	$S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	0	**Mezzo Windsor**
7	2	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\otimes}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1	1	St. Andrew
7	3	$S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	1	Plattsburgh
8	2	$S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	2	Cavendish
8	3	$S_{\otimes}C_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	0	0	**Windsor**
9	2	$S_{\odot}D_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1	3	Grantchester
9	3	$S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$	0	0	**Hanover**
9	4	$S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}C_{\otimes}D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A$	1	2	Balthus

Tabella 2. Nodi estetici

Topologia

"Un nodo è un oggetto nello spazio ottenuto da una corda sottilissima, perfettamente flessibile ed elastica, con la quale viene formato un garbuglio e della quale alla fine vengono saldati insieme i due estremi. Lo spessore della corda è così piccolo che non bisogna mai preoccuparsene mentre si manipola il nodo." [4]

"due nodi sono tra loro equivalenti quando si possono deformare l'uno nell'altro senza strappi o rotture." [4]

Nodo banale 0_1 $\rightarrow$ **Mezzo Windsor**

Trifoglio 3_1 $\rightarrow$ Tiro a quattro

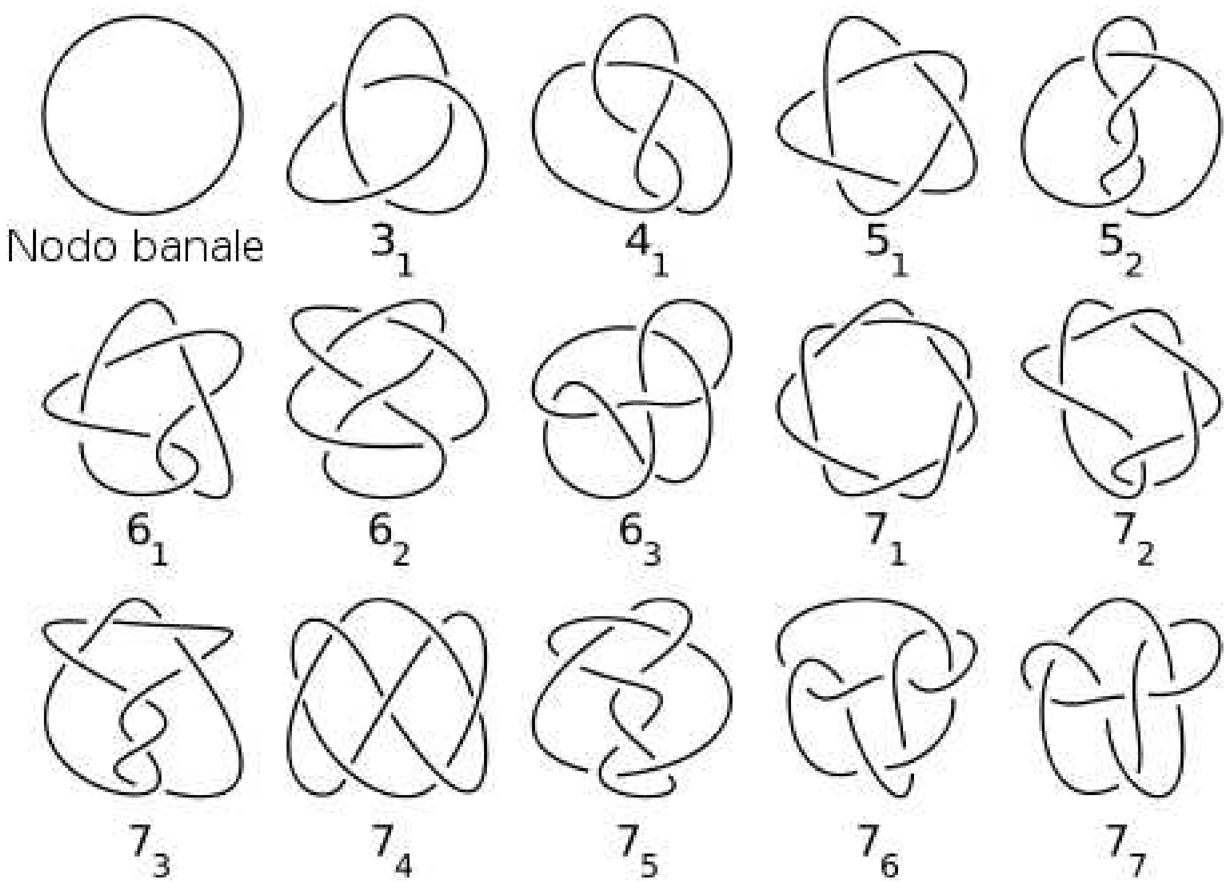

Figura 1. Classificazione dei nodi primi con notazione Alexander-Briggs (Wikipedia)

Teorema 1. (di Schubert) *Ogni nodo si scompone in nodi primi e questa scomposizione è unica.*

Nota 2. Con una cravatta possiamo anche introdurre il nastro di Möbius... ma il modo migliore per affrontare lo studio di questa superficie rigata non orientabile in laboratorio è attraverso il lavoro a maglia con ferri circolari.

Per un approccio allo studio della topologia delle superfici con il lavoro a maglia si rinvia al sito

`http://www.toroidalsnark.net/mathknit.html`

curato da Sarah Marie Belcastro.

Figura 2. Cappello a bottiglia di Klein

Isometrie e tassellazioni

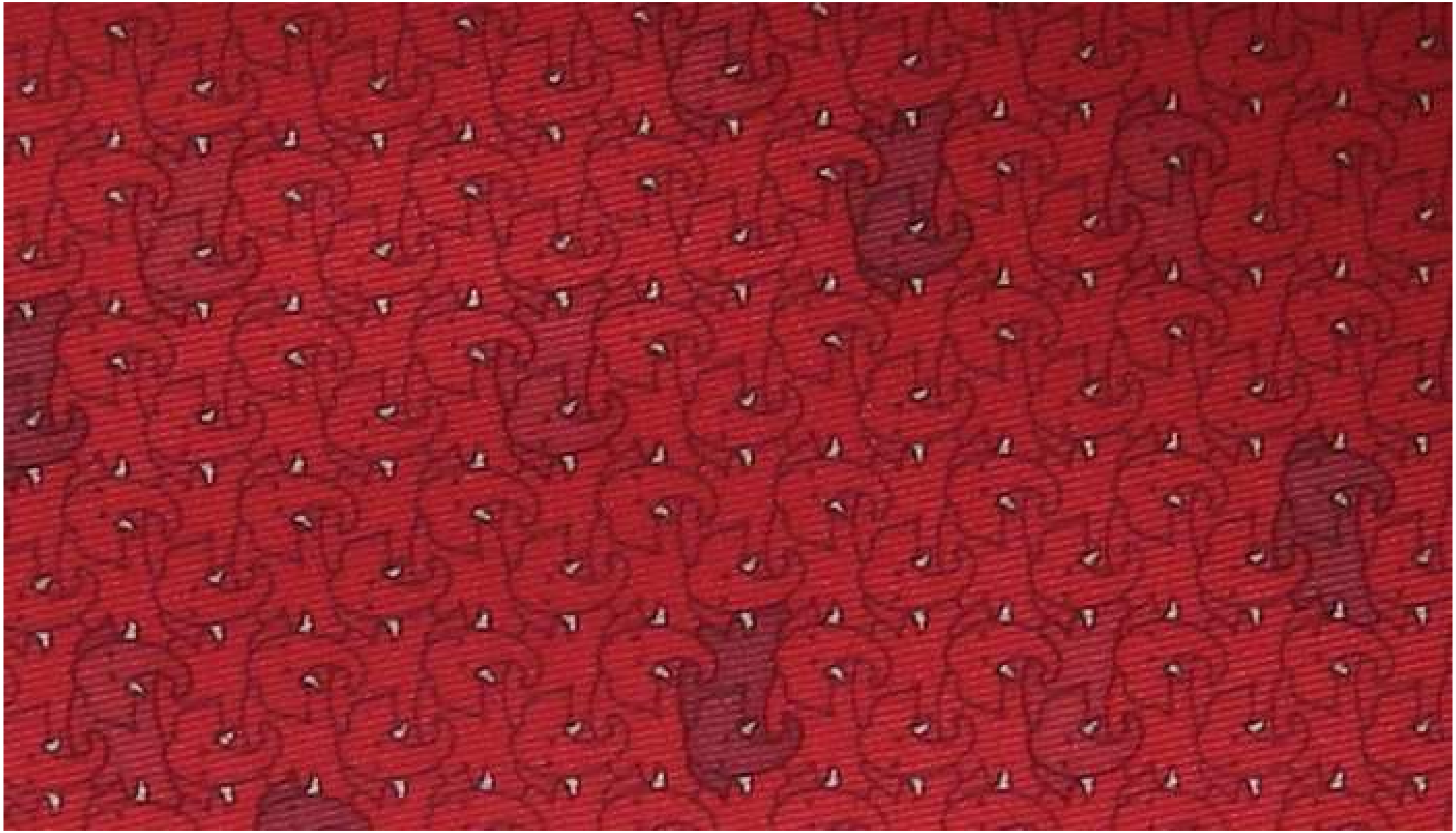

Figura 3. Motivo Hermès

Possiamo classificare il gruppo di simmetria del motivo (non colorato)

<table>
<tr><th rowspan="2">Size of smallest rotation</th><th colspan="6">Has reflection?</th></tr>
<tr><td colspan="4">Yes</td><td colspan="2">No</td></tr>
<tr><td>360° / 6</td><td colspan="4">p6m</td><td colspan="2">p6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360° / 4</td><td colspan="4">Has mirrors at 45°?</td><td colspan="2" rowspan="2">p4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yes: p4m</td><td colspan="2">No: p4g</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360° / 3</td><td colspan="4">Has rot. centre off mirrors?</td><td colspan="2" rowspan="2">p3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yes: p31m</td><td colspan="2">No: p3m1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">360° / 2</td><td colspan="4">Has perpendicular reflections?</td><td colspan="2" rowspan="2">Has glide reflection?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Yes</td><td>No</td></tr>
<tr><td colspan="3">Has rot. centre off mirrors?</td><td rowspan="2">pmg</td><td rowspan="2">Yes: pgg</td><td rowspan="2">No: p2</td></tr>
<tr><td>Yes: cmm</td><td colspan="2">No: pmm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">none</td><td colspan="4">Has glide axis off mirrors?</td><td colspan="2">Has glide reflection?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yes: cm</td><td colspan="2">No: pm</td><td>Yes: pg</td><td>No: p1</td></tr>
</table>

Figura 4. Classificazione dei gruppi cristallografici piani (Wikipedia)

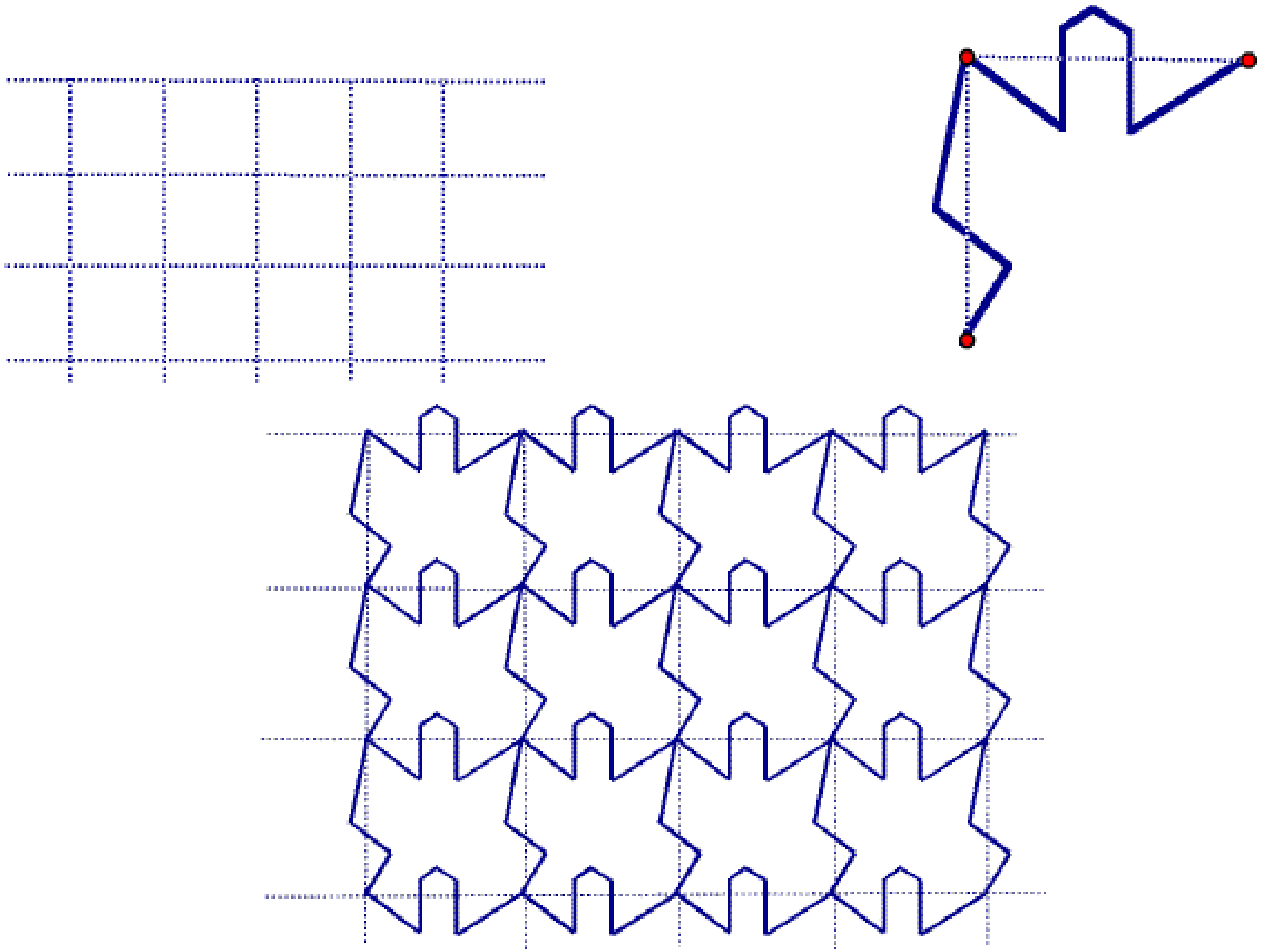

Figura 5. Il metodo di Escher (source Wikipedia)

Altri esempi da Escher

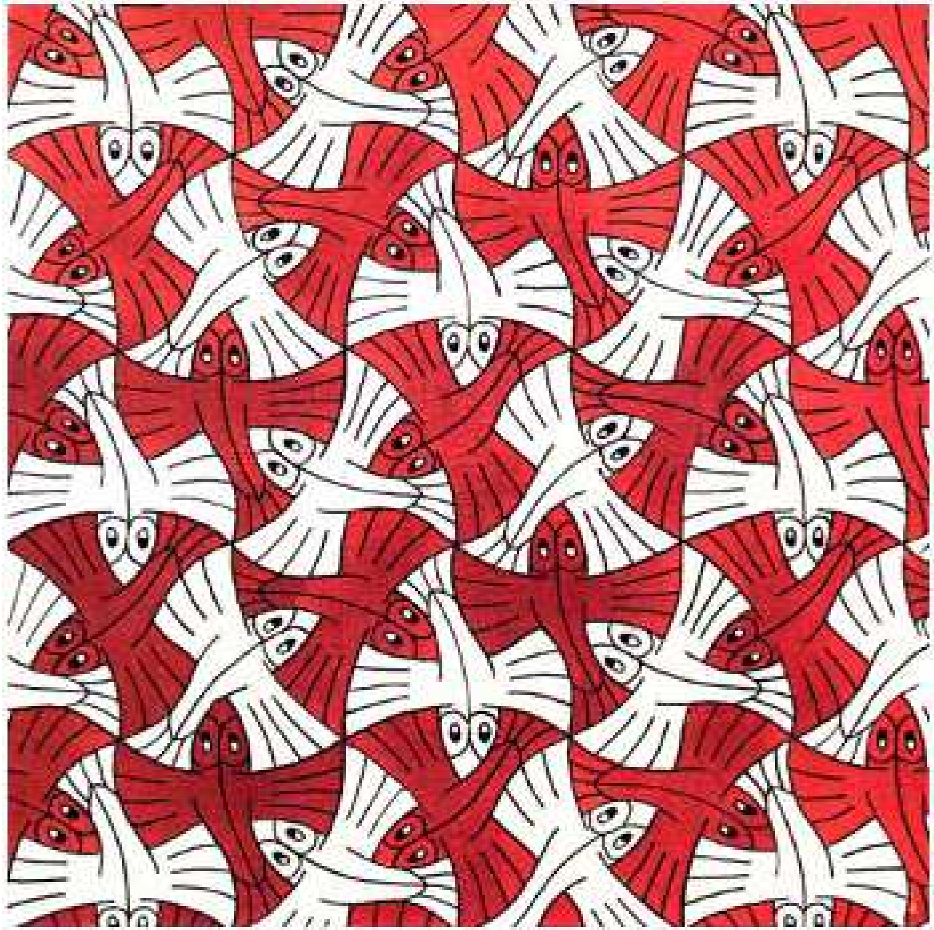

Figura 6. Tassellazione del piano di Escher

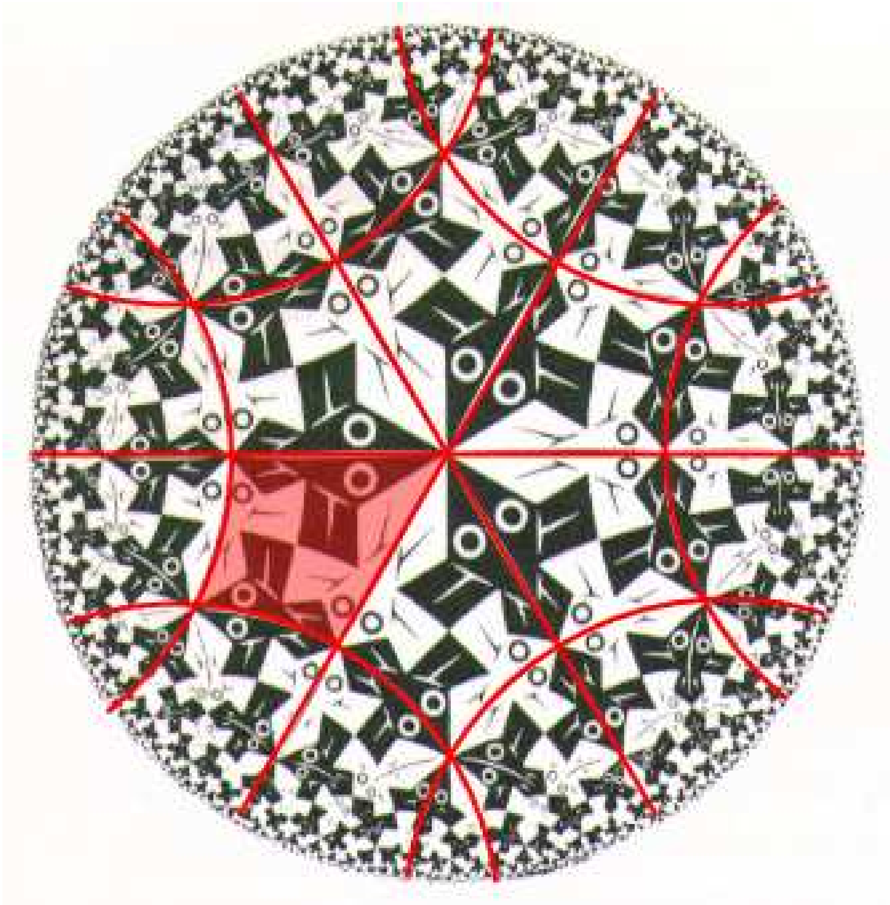

Figura 7. Tassellazione di Escher del piano ipebolico

Bibliografia

[1] T. Fink Y. Mao, 85 modi di annodare la cravatta, Edizioni Bompiani, Milano, 2007.

[2] T. Fink Y. Mao, Designing tie knots by random walks, Nature **398**, 1999.

[3] T. Fink Y. Mao, Tie knots, random walks and topology, Physica A 276: 109-121, 2000.

[4] C. Petronio, Topologia dei nodi, Xlatangente, disponibile online.

[5] A. Sossinsky, Nodi, Genesi di una teoria matematica, Boringhieri, 2000.